Convergence des méthodes itératives

Lemme : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme subordonnée $|||\ |||$ telle que $|||A||| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

$A \in M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable : $A = PTP^{-1}$. Soit $\delta > 0$.
Si $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$, posons $e_i' = \delta^{i-1} e_i$, $D_\delta = \mathrm{diag}(1, \delta, \dots, \delta^{n-1})$
Soit $j \in \{1, \dots, n\}$. $T e_j' = \delta^{j-1} \sum_{i=1}^{j} t_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{j} \delta^{j-i} t_{ij} e_i'$, donc, dans la base (e_i'),

$$D_\delta^{-1} T D_\delta = \begin{pmatrix} t_{11} & \delta t_{12} & \cdots & \delta^n t_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & \delta t_{n-1,n} \\ (0) & & & t_{n,n} \end{pmatrix} = \tilde{T}, \quad A = (PD_\delta)\tilde{T}(PD_\delta)^{-1}.$$

Posons : $\|x\| = \|(PD_\delta)^{-1} x\|_\infty$, $|||\cdot|||$ norme subordonnée associée : $|||B||| = |||(PD_\delta)^{-1} B\, PD_\delta|||_\infty$.
Or $|||C|||_\infty = \sup_i \sum_{j=1}^{n} |t_{ij}|$
Donc $|||A||| = |||(PD_\delta)^{-1} A\ PD_\delta|||_\infty = |||\tilde{T}|||_\infty = \sup_i \sum_{j=1}^{n} |\delta^{j-i} t_{ij}| \leq \rho(A) + \varepsilon$

en choisissant δ tel que $\forall i, \sum_{j=i+1}^{n} \delta^{j-i} |t_{ij}| < \varepsilon$.

Thm : La méthode itérative $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^n \\ u_{k+1} = M^{-1}(Nu_k + b) \end{cases}$ pour la décomposition (M, N) est convergente ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Soit u tel que $Au = b$ i.e. $Mu = Nu + b$. Posons $(e_k = u_k - u)$.
$e_{k+1} = u_{k+1} - u = M^{-1}Nu_k + M^{-1}b - M^{-1}Nu - M^{-1}Nb = M^{-1}N e_k$.
Donc, $\forall k \in \mathbb{N}$, $e_k = (M^{-1}N)^k e_0$.
* Si $\rho(M^{-1}N) < 1$, pour $\varepsilon = \frac{1 - \rho(M^{-1}N)}{2} > 0$, il existe $|||\cdot|||$ telle que $|||M^{-1}N||| \leq \rho(M^{-1}N) + \varepsilon < 1$
De là, $\|e_k\| \leq |||M^{-1}N|||^k \|e_0\| \longrightarrow 0$ donc (u_k) converge vers u.
* Si $\rho(M^{-1}N) \geq 1$, alors considérons $\lambda_0 \in Sp(A)$ avec $|\lambda_0| \geq 1$, $v = v_1 + iv_2$ $\vec{vp}$ associé.
$\forall k \in \mathbb{N}$, $(M^{-1}N)^k v = \lambda^k v$, donc on choisit $u_0 = u + v_1$ pour lequel la méthode ne converge pas.

Cor : Le rayon spectral associé à la méthode de relaxation est $\geq |\omega - 1|$.
En particulier elle ne peut converger que si $\omega \in]0, 2[$.

Dans ce cas, $M^{-1}N = \left(\frac{D}{\omega} - E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega} D + F\right)$, trigonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(M^{-1}N) = \frac{\det\left((1-\omega)D + \omega F\right)}{\det(D - \omega E)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} (1-\omega) a_{ii}}{\prod_{i=1}^{n} a_{ii}} = (1-\omega)^n.$$

De là, $\rho(M^{-1}N)^n \geq |\det(M^{-1}N)| = |1-\omega|^n$ puis $\rho(M^{-1}N) \geq |\omega - 1|$.
Ainsi $\rho(M^{-1}N) < 1 \Rightarrow |\omega - 1| < 1 \Rightarrow \omega \in]0, 2[$.